МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

53(07)
Г962

А.В. Гусев, В.Л. Дильман, А.В. Кунгурцева

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К МНОГОПРОФИЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРНОЙ ОЛИМПИАДЕ «ЗВЕЗДА»

Челябинск
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Центр по работе с абитуриентами

А.В. Гусев, В.Л. Дильман, А.В. Кунгурцева

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К МНОГОПРОФИЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРНОЙ ОЛИМПИАДЕ «ЗВЕЗДА»

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2021

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В данном сборнике собраны задачи, которые предлагались на олимпиаде «Звезда» по профилю «Естественные науки» в 2020-2021 учебном году. Задачи разделены по классам от 6-го до 11-го. При работе со сборником особое внимание стоит уделить задачам из своего класса, а также младших классов. Это позволит вам познакомиться с теми темами, которые будут вам предложены на ближайших олимпиадах. Можно заглянуть и в старшие классы, т.к. некоторые темы повторяются для разных параллелей.

Если вы неуверенно решаете задачи по математике и физике, то рекомендуется сначала ознакомиться с решениями, приведенными в сборнике, а затем попытаться самостоятельно решить аналогичные задачи, приведенные в конце каждого раздела. Напротив, если вы хорошо решаете задачи, загляните сначала в конец раздела для своего класса и попробуйте самостоятельно решить предложенные задачи. Только в случае затруднения посмотрите в начале раздела, как решается подобная задача. Имейте ввиду, что часто задачи имеют несколько вариантов решения, которые нужно найти.

Этот сборник познакомит вас с несложными, но нестандартными задачами, которые, надеемся, вас заинтересуют и помогут вам при подготовке к олимпиадам.

1. Задания для учащихся 6-х классов

1.1. Разбор решений задач

1. К Ване в гости пришли его друзья. Мама Вани спросила у него: “Сколько пришло гостей?”. Ваня ответил: “Больше шести”, а рядом стоявшая сестрёнка сказала: “Больше пяти”. Сколько было гостей, если известно, что одно утверждение верное, а другое ложное?

Ответ: 6.

Решение. Если сестрёнка сказала неправду, то гостей не больше пяти человек, следовательно, и Ваня сказал неправду, что противоречит условию задачи. То есть ложное утверждение у Вани. Тогда гостей не больше 6, и больше 5, значит, шесть.

2. Дано числовое выражение:

$$\mathbf{4+32:8+4\cdot 3}.$$

Расставьте скобки в этом выражении так, чтобы получить наименьшее возможное число. Найдите это число.

Ответ: 1.

Решение. Расставляем скобки таким образом:

$$(4+32):((8+4)\cdot 3).$$

3. Отец Вани, когда его спросили о возрасте сына, ответил: “Если удвоенный возраст сына уменьшить на утроенный возраст, который он имел шесть лет назад, то получите его возраст в настоящее время”. Сколько лет Ване?

Ответ: 9.

Решение. Пусть x лет – возраст Вани в настоящее время. Решая уравнение $2x-3(x-6)=x$, получаем ответ.

4. В некоторых странах, до недавнего времени, для измерения температуры использовалась температурная шкала Реомюра. Нуль в этой шкале совпадал с нулём градусов Цельсия, а температура кипения воды была равна 80 градусам. Определите значение нормальной температуры человеческого тела ($36{,}6^{O}C$) в градусах Реомюра.

Ответ: 29,28.

Решение. Так как 0^OC = 0^OR и 100^OC = 80^OR, то получаем, что перевод из одной шкалы в другую осуществляется с помощью соотношения 1^OC=$0{,}8^O$R. В результате получаем, $36{,}6^O$C=$29{,}28^O$R.

5. Железный кубик имеет массу 8 кг. Какая масса будет у другого железного кубика (в кг), если длина его ребра в два раза больше по сравнению с исходным?

Ответ: **64**.

Решение. Объём другого кубика $V_к=a_к^3=8a_0^3=8V_0$, следовательно, его масса $m_к=8m_0=64$ кг.

6. Автомобиль проехал первый участок пути длиной 30 км за 30 минут, а на втором участке он ехал со скоростью 10 м/с в течение одного часа. Определите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

Ответ: 44 км/ч ≈ 12,2 м/с.

Решение. Средняя скорость: $v_{ср}=\frac{s}{t}=\frac{s_1+v_2\cdot t_2}{t_1+t_2}=\frac{30+36\cdot 1}{0{,}5+1}=44\ км/ч\approx 12{,}2\ м/с$.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. К Ване в гости пришли его друзья. Мама Вани спросила у него: “Сколько пришло гостей?”. Ваня ответил: “Больше семи”, а рядом стоявшая сестрёнка сказала: “Больше шести”. Сколько было гостей, если известно, что одно утверждение верное, а другое ложное?

2. Дано числовое выражение:

$$\mathbf{6+18:9+3\cdot 4}$$

Расставьте скобки в этом выражении так, чтобы получить наименьшее возможное число. Найдите это число.

3. Отец Вани, когда его спросили о возрасте сына, ответил: “Если удвоенный возраст сына уменьшить на утроенный возраст, который он имел восемь лет назад, то получите его возраст в настоящее время”. Сколько лет Ване?

4. В некоторых странах, до недавнего времени, для измерения температуры использовалась температурная шкала Реомюра. Нуль в этой шкале совпадал с нулём градусов Цельсия, а температура кипения воды была равна 80 градусам.

Определите значение температуры кипения спирта (78,4$^{\mathrm{O}}$С) в градусах Реомюра.

5. Железный кубик имеет массу 8 кг. Какая масса будет у другого железного кубика (в кг), если длина его ребра в два раза меньше по сравнению с исходным?

6. Автомобиль проехал первый участок пути длиной 30 км за 1 час, а на втором участке он ехал со скоростью 20 м/с в течение тридцати минут. Определите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

2. Задания для учащихся 7-х классов

2.1. Разбор решений задач

1. Сестре втрое больше лет, чем было тогда, когда брат был в её возрасте. Когда сестре будет столько, сколько теперь её брату, то им обоим вместе будет 96 лет. Сколько лет сестре в настоящее время?

Ответ: 24.

Решение. Пусть m лет было сестре, когда брат был в её настоящем возрасте. Тогда брату было в то время $3m$ лет, а сестре сейчас $3m$ лет. Разница в возрасте брата и сестры составляет $2m$ лет. То есть брату сейчас $5m$ лет. А когда сестре будет $5m$ лет, то брату будет $7m$ лет. Получаем уравнение $5m+7m=96$, откуда $m=8$. Следовательно, сестре в настоящее время 24 года.

2. Каждое из m чисел равно $2n+5$, а каждое из n чисел равно $5-2m$. Найдите среднее арифметическое всех этих чисел.

Ответ: 5.

Решение. Найдём среднее арифметическое этих чисел:

$$\frac{m(2n+5)+n(5-2m)}{m+n}.$$

После преобразований получаем ответ.

3. Двое учащихся покупают тетрадь, которая стоит целое число рублей. Одному из них не хватило двух рублей, а другому десять рублей. Когда они сложили свои деньги, то им опять не хватило. Сколько стоит тетрадь, если у каждого ученика были деньги?

Ответ: 11.

Решение. Пусть тетрадь стоит x рублей. Тогда у первого ученика было $x-2$ рублей, а у второго $x-10$ рублей. Заметим, что $x-10>0$. Получаем $x-2+x-10<x$. Следовательно, $10<x<12$, то есть $x=11$.

4. Единицей измерения физической величины называемой мощностью является ватт. Один ватт через основные единицы системы измерений можно представить как килограмм умножить на метр в квадрате и поделить на секунду в третьей степени. Переведите 216 миллиардов г·мм^2/мин^3 в ватты.

Ответ: 0,001.

Решение. 216 миллиардов г·мм^2/мин^3 = $(216\cdot10^9\cdot10^{-3}$ кг $\cdot10^{-6}$ м$^2)/(60^3\cdot$с$^3)$ = 0,001 Вт.

5. Определите угол между часовой и минутной стрелками часов, если они показывают 4 часа 15 минут.

Ответ: 37,5$^\text{O}$.

Решение. Если считать от вертикали, то 15 минут – это 90$^\text{O}$, 4 часа – это 120$^\text{O}$. При этом часовая стрелка успела пройти четверть расстояния между 4-я и 5-ю часами. В результате, угол между часовой и минутной стрелкой составляет:

$(120^\text{O}+7{,}5^\text{O}-90^\text{O})=37{,}5^\text{O}$.

6. Автомобиль движется к мосту со скоростью 54 км/ч. В начальный момент времени расстояние от него до моста 300 м. Известно, что длина моста 200 метров. Определите на каком расстоянии (в метрах) от моста окажется автомобиль через одну минуту?

Ответ: 400.

Решение. За одну минуту автомобиль проезжает 15 м/с · 60 с = 900 метров.

Следовательно, расстояние до моста 900 – 300 – 200 = 400 метров.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. Сестре втрое больше лет, чем было тогда, когда брат был в её возрасте. Когда сестре будет столько, сколько теперь её брату, то им обоим вместе будет 84 года. Сколько лет брату в настоящее время?

2. Каждое из m чисел равно $3n+4$, а каждое из n чисел равно $4-3m$. Найдите среднее арифметическое всех этих чисел.

3. Двое учащихся покупают тетрадь, которая стоит целое число рублей. Одному из них не хватило двух рублей, а другому восемь рублей. Когда они сложили свои деньги, то им опять не хватило. Сколько стоит тетрадь, если у каждого ученика были деньги?

4. Единицей измерения физической величины называемой работой силы является джоуль. Один джоуль через основные единицы системы измерений можно представить как килограмм умножить на метр в квадрате и поделить на секунду во второй степени. Переведите 216 миллиардов г·мм^2/мин^2 в джоули.

5. Определите угол между часовой и минутной стрелками часов, если они показывают 8 часов 30 минут.

6. Автомобиль движется к мосту со скоростью 72 км/ч. В начальный момент времени расстояние от него до моста 800 м. Известно, что длина моста 100 метров. Определите на каком расстоянии от моста (в метрах) окажется автомобиль через две минуты?

3. Задания для учащихся 8-х классов

3.1. Разбор решений задач

1. Из города по прямолинейному шоссе вышел турист. Когда он прошёл 10 км, за ним из города выехал автомобиль. Скорость автомобиля в 10 раз больше скорости туриста. На каком расстоянии от города (в км) автомобиль догонит туриста?

Ответ: $\mathbf{11\frac{1}{9}}$.

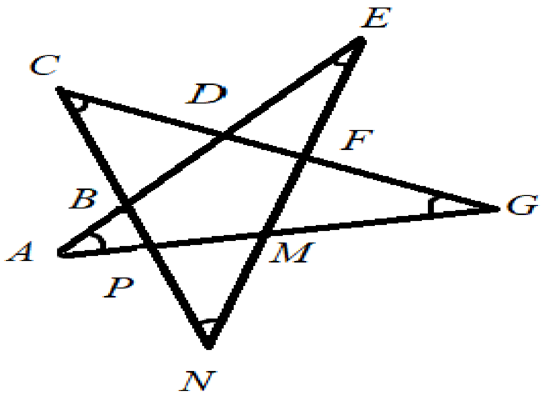
Решение. Пусть скорость туриста v км/ч. Тогда скорость автомобиля $10v$ км/ч. Скорость преследования $9v$ км/ч. Время в пути автомобиля до встречи с туристом $t = \frac{10}{9v}$ ч. Следовательно, до встречи с туристом автомобиль проедет $t \cdot 10v = \frac{10}{9v} \cdot 10v = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ км.

2. Если у натурального числа зачеркнуть последнюю цифру, то оно уменьшится в 13 раз. Найдите все такие числа.

Ответ: 13; 26; 39.

Решение. Пусть x – число, получаемое после вычёркивания последней цифры. Тогда исходное число можно записать в виде $10x + a$, где a принимает значения от 0 до 9. Получаем уравнение $10x + a = 13x$, откуда $3x = a$. Так как a – цифра, то возможные значения для x: 1, 2, 3. Соответственно a: 3, 6, 9. То есть искомые числа: 13, 26, 39.

3. (*17 баллов*) У многоугольника-звезды отмеченные углы равны друг другу. Найдите величину отмеченного угла. Ответ запишите в градусах.



Ответ: 36.

Решение. Пусть отмеченный угол равен α. Треугольник *ADG* равнобедренный. $\angle ADG = 180^o - 2\alpha$, а $\angle CDA = 2\alpha$. Аналогично получаем $\angle CBD = 2\alpha$. Тогда $5\alpha = 180^o$, то есть $\alpha = 36^o$.

4. Два шара массами m_1=2 кг и m_2=4 кг, радиусами r_1=10 см и r_2=20 см соответственно, соединены стержнем, масса которого m=6 кг. Известно, что длина стержня L=1 метр. Определите расстояние (в см) от центра лёгкого шара до центра тяжести системы.

Ответ: 73,3.

Решение. Условие равновесия: $m_1g(r_1+L/2+x)+mgx=m_2g(r_2+L/2–x)$, где x – расстояние от центра стержня до центра тяжести системы.

Получаем, что x=40/3 см, следовательно, расстояние от центра лёгкого шара до центра тяжести системы s=10+50+40/3 ≈ 73,3 см.

5. Полый медный кубик с длиной ребра 6 см имеет массу 890 г. Определите толщину стенок кубика. Плотность меди 8900 кг/м^3.

Ответ: ≈0,46 см или ≈5мм.

Решение. Объём меди: $V = \frac{m}{\rho} = \frac{890}{8,9} = 100\ см^3$.

Площадь поверхности кубика: $S = 6a^2 = 216\ см^2$.

Толщина стенок: $h = \frac{V}{S} = \frac{100}{216} \approx 0,46\ см \approx 5\ мм$.

6. В морозильной камере вода остыла от 10^{O}С до 0^{O}С за 10 минут. Через какое время вода полностью превратится в лёд? Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/кг·^{O}С, удельная теплота плавления 3,3·10^5 Дж/кг.

Ответ: ≈4714 с или ≈79 минут.

Решение. Мощность морозильной камеры: $P = \frac{Q_{охл}}{10\cdot 60} = \frac{Q_{замерз}}{t}$.

Получаем:

$$t = 10 \cdot 60 \cdot \frac{Q_{замерз}}{Q_{охл}} = 10 \cdot 60 \cdot \frac{\lambda m}{cm\Delta T} = 10 \cdot 60 \cdot \frac{330000}{4200\cdot 10} \approx 4714\ сек \approx 79\ минут.$$

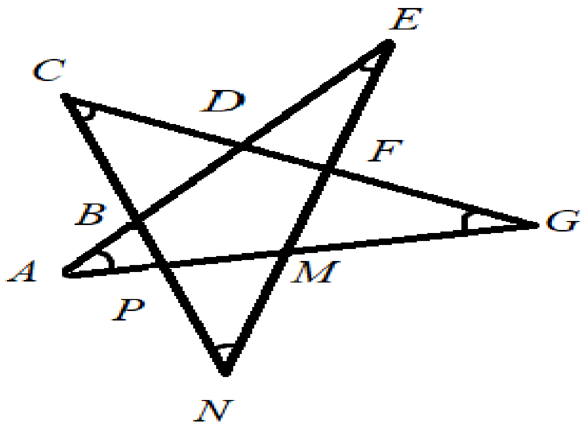
3.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. Из города по прямолинейному шоссе вышел турист. Когда он прошёл 10 км, за ним из города выехал автомобиль. Скорость автомобиля в 7 раз больше скорости туриста. На каком расстоянии от города (в км) автомобиль догонит туриста?

2. Если у натурального числа зачеркнуть последнюю цифру, то оно уменьшится в 14 раз. Найдите все такие числа.

3. У многоугольника-звезды отмеченные углы равны друг другу. Найдите величину угла *ADG*. Ответ запишите в градусах.



4. Два шара массами m_1=4 кг и m_2=2 кг, радиусами r_1=10 см и r_2=20 см соответственно, соединены стержнем, масса которого m=6 кг. Известно, что длина стержня L=1 метр. Определите расстояние (в см) от центра лёгкого шара до центра тяжести системы.

5. Полый медный кубик с длиной ребра 3 см имеет массу 445 г. Определите толщину стенок кубика. Плотность меди 8900 кг/м^3.

6. В морозильной камере вода остыла от 20^{O}C до 0^{O}C за 20 минут. Через какое время вода полностью превратится в лёд? Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/кг·^{O}C, удельная теплота плавления 3,3·10^5 Дж/кг.

4. Задания для учащихся 9-х классов

4.1. Разбор решений задач

1. Если открыть только кран с горячей водой, то ванна заполнится за 25 мин, а если только кран с холодной водой, то за 20 мин. Антон пустил в ванну горячую воду. Через сколько минут он должен открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения в ванне горячей воды было вдвое больше, чем холодной?

Ответ: Через 10 мин.

Решение. Горячий кран должен заполнить 2/3 ванны, поэтому он должен быть открыт $25 \cdot \frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$ мин. Холодный кран должен заполнить 1/3 ванны, поэтому он должен быть открыт $20 \cdot \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$ мин. Значит, холодный кран должен быть открыт на 10 мин позже, чем горячий кран.

2. Парабола $y = 16x^2 - 24x - 7$ пересекает ось *Ox* в точках *A* и *B*, а ось *Oy* в точке *C*. Найдите площадь треугольника *ABC*.

Ответ: 7.

Решение. $|y(0)| = 7$ – высота треугольника, опущенная из вершины *C*. Длина основания – модуль разности корней уравнения $16x^2 - 24x - 7 = 0$.

3. Сколько способов переставить буквы слова **СКУТЕР** так, чтобы гласные буквы не стояли рядом?

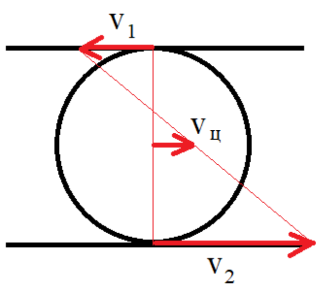
Ответ: 480.

Решение. Сначала расставим согласные буквы. Это можно сделать 4!=24 способами. Теперь для гласных букв 5 свободных мест. Выбираем место для первой гласной, а затем для второй. Это можно сделать $5 \cdot 4 = 20$ способами. По правилу произведения всего $4! \cdot 5 \cdot 4 = 480$ способов.

4. Две параллельные рейки движутся в противоположные относительно земли стороны со скоростями 2 м/с и 5 м/с. Между рейками зажат цилиндр, катящийся по рейкам без проскальзывания. Определите скорость его центра (в м/с).

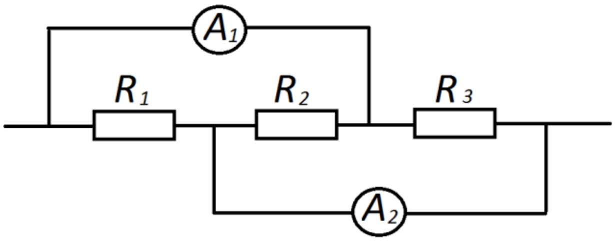
Ответ: 1,5.

Решение. Описываемая ситуация представлена на рисунке.



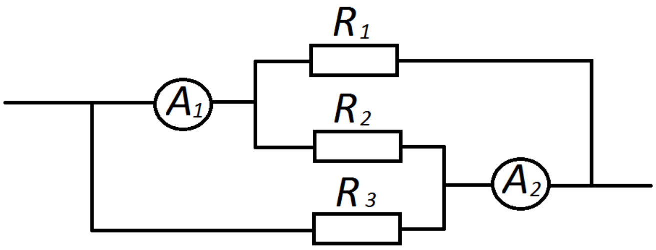
В результате видно, что $v_ц = \frac{v_2 - v_1}{2} = 1{,}5\,\boldsymbol{м/с}$.

5. Определите, на сколько отличаются показания идеальных амперметров в цепи, представленной на рисунке, если сила тока, протекающего через резистор R_3, равна 1 мА. Сопротивления резисторов R_1=2 кОм, R_3=10 кОм. Ответ укажите в миллиамперах.



Ответ: 4.

Решение. Резисторы соединены между собой параллельно, следовательно, $I_1 R_1 = I_3 R_3$, то есть $I_1 = 5\,мА$. Исходную схему можно представить следующим образом:



Получаем, что показания первого амперметра – это $I_1 + I_2$. А показания второго – это $I_3 + I_2$. Окончательно получаем, что разность показаний амперметров $I_1 - I_3 = 4\,\boldsymbol{мА}$.

6. Груз на пружине совершает колебания с амплитудой 50 см. Известно, что, начиная своё движение из крайней точки траектории, путь в 1,5 метра груз проходит за 6 секунд. Определите частоту колебаний.

Ответ: 0,125.

Решение. Путь 1,5 метра груз проходит за 0,75 часть периода. Следовательно, период T=8 секунд. Частота $n = \frac{1}{T} = 0{,}125\,\boldsymbol{с^{-1}}$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

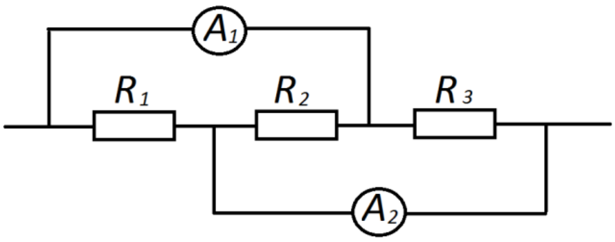
1. Если открыть только кран с горячей водой, то ванна заполнится за 22 мин, а если только кран с холодной водой, то за 17 мин. Антон пустил в ванну горячую воду. Через сколько минут он должен открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения в ванне горячей воды было вдвое больше, чем холодной?

2. Парабола $y = 9x^2 - 30x + 16$ пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Сколько способов переставить буквы слова **СКРИПАЧ** так, чтобы гласные буквы не стояли рядом?

4. Две параллельные рейки движутся в противоположные относительно земли стороны со скоростями 4 м/с и 9 м/с. Между рейками зажат цилиндр, катящийся по рейкам без проскальзывания. Определите скорость его центра (в м/с).

5. Определите, на сколько отличаются показания идеальных амперметров в цепи, представленной на рисунке, если сила тока, протекающего через резистор R_3, равна 2 мА. Сопротивления резисторов R_1=4 кОм, R_3=1 кОм. Ответ укажите в миллиамперах.



6. Груз на пружине совершает колебания с амплитудой 25 см. Известно, что, начиная своё движение из крайней точки траектории, путь в 1,5 метра груз проходит за 6 секунд. Определите частоту колебаний.

5. Задания для учащихся 10-х классов

5.1. Разбор решений задач

1. Парабола $y = x^2 + 20x + c$, где $c \neq 0$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Известно, что точки A и C симметричны относительно прямой y=x. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 231.

Решение. Поскольку $y(0) = c$, имеем $C(0,c)$ и $A(c,0)$. Поэтому один из корней уравнения $x^2 + 20x + c = 0$ равен c, то есть $c^2 + 20c + c = 0$, откуда $c = x_1 = -21$. По теореме Виета $x_2 = 1$. Длина основания треугольника равна 22, а высота 21.

2. Из точки A проведены касательная к некоторой окружности и секущая. B – точка касания, C и D – точки пересечения секущей и окружности, причём C

лежит между A и D. Известно, что AB:AC=3:2, а S_{ABC}=20. Найдите площадь треугольника BCD.

Ответ: 25.

Решение. Пусть AC=2x, CD=y. Тогда AB=3x. По теореме о квадрате касательной AB^2=AD·AC, то есть $9x^2 = (y+2x)\cdot 2x$. Отсюда $y = 2{,}5x$. У треугольников ABC и BCD общая высота, проведённая из вершины B. Поэтому $\frac{S_{BCD}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{CA} = \frac{y}{2x} = \frac{2{,}5x}{2x} = \frac{5}{4}$.

3. Сколько способов переставить буквы слова **ТРАМПЛИН** так, чтобы гласные буквы не стояли рядом?

Ответ: 30240.

Решение. Сначала расставим согласные буквы. Это можно сделать 6!=720 способами. Теперь для гласных букв 7 свободных мест. Выбираем место для первой гласной, а затем для второй. Это можно сделать $7\cdot 6 = 42$ способами. По правилу произведения всего $6!\cdot 7\cdot 6 = 720\cdot 42 = 30240$ способов.

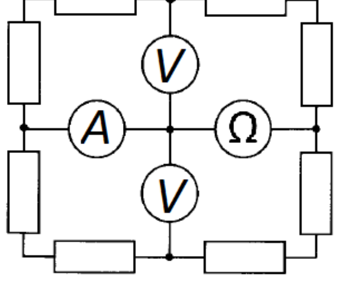
4. Камень, брошенный под углом к горизонту, в самой верхней точке своего полёта оказался через 2 секунды после броска. Причём, его скорость в этот момент времени оказалась равной 8 м/с. Определите дальность полёта камня (в метрах). Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 32.

Решение. В самой верхней точке: $v_y = 0$, $v_x = v_0\cos\alpha = 8\,м/с.$

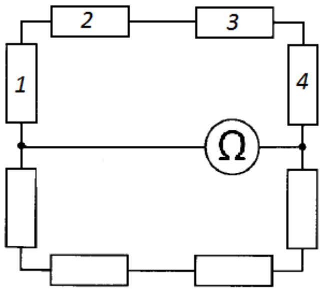
Время всего полёта $t_n = 4\,с.$ Следовательно, дальность полета $x = v_0\cos\alpha t_n = 8\cdot 4 = 32\,\boldsymbol{м}.$

5. В цепи, изображённой на рисунке, омметр показывает 2000 Ом, вольтметры по 4 В. Все резисторы одинаковые. Вольтметр и амперметр идеальные. Определите показание амперметра. Ответ запишите в миллиамперах.



Ответ: 4.

Решение. Приборы идеальные, следовательно, мы имеем дело со следующей схемой:



Сопротивление верхнего участка равно 4000 Ом. Так как все сопротивления одинаковые, то R_1=1000 Ом, при этом суммарное напряжение на первом и втором резисторах равно 4 В. Получаем, что по верхнему участку цепи течёт ток $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 2\, мА$. Показания амперметра $2I_1 = 4\, мА$.

6. В калориметре смешали два вещества одинаковой массы. Известно, что у первого вещества температура в результате повысилась в два раза, а у второго – понизилась в три раза. Известно, что удельная теплоёмкость первого 1000 Дж/кг·К. Найдите удельную теплоёмкость второго вещества.

Ответ: 250.

Решение. Уравнение теплового баланса: $c_1 m\left(T - \frac{T}{2}\right) = c_2 m(3T - T)$.

Получаем $c_2 = \frac{c_1}{4} = 250\, \boldsymbol{Дж/(кг \cdot К)}$.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

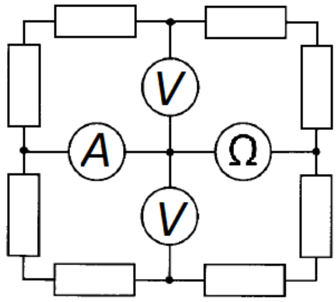
1. Парабола $y = x^2 - 20x + c$, где $c \neq 0$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Известно, что точки A и C симметричны относительно прямой y=x. Найдите площадь треугольника ABC.

2. Из точки A проведены касательная к некоторой окружности и секущая. B – точка касания, C и D – точки пересечения секущей и окружности, причём C лежит между A и D. Известно, что AB:AC=5:4, а S_{ABC}=32. Найдите площадь треугольника BCD.

3. Сколько способов переставить буквы слова **КАСТРЮЛЯ** так, чтобы гласные буквы не стояли рядом?

4. Камень, брошенный под углом к горизонту, в самой верхней точке своего полёта оказался через 4 секунды после броска. Причём, его скорость в этот момент времени оказалась равной 5 м/с. Определите дальность полёта камня (в метрах). Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

5. В цепи, изображённой на рисунке, омметр показывает 1000 Ом, вольтметры по 4 В. Все резисторы одинаковые. Вольтметр и амперметр идеальные. Определите показание амперметра. Ответ запишите в миллиамперах.



6. В калориметре смешали два вещества одинаковой массы. Известно, что у первого вещества температура в результате понизилась в два раза, а у второго – повысилась в три раза. Известно, что удельная теплоёмкость первого 1000 Дж/кг·К. Найдите удельную теплоёмкость второго вещества.

6. Задания для учащихся 11-х классов

6.1. Разбор решений задач

1. Прямая пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами $x_1 = -6$ и $x_2 = 4$. Какова абсцисса точки, в которой эта прямая пересекает ось *Ox*?

Ответ: 12.

Решение. Пусть уравнение прямой $y = kx + b$. Тогда x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 = kx + b$. По теореме Виета $k = x_1 + x_2 = -2,\ b = -x_1x_2 = 24$. Осталось решить уравнение $kx + b = 0$ при найденных значениях k и b.

2. *ABC* – прямоугольный треугольник с гипотенузой *AB*. Из вершины *C* опущен перпендикуляр *CD* на гипотенузу. На отрезке *CD* как на диаметре построена окружность. Она пересекает стороны *AC* и *BC* соответственно в точках *E* и *F*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если *EC*=50, *FC*=20.

Ответ: 4205.

Решение. Из точки на окружности диаметр виден под прямым углом. Поэтому *CEDF* – прямоугольник. Значит, в прямоугольном треугольнике *ADC* высота *DE*=*CF*=20. По известному свойству $ED^2=AE\cdot EC$. Отсюда $AE=20^2/50=8$. Аналогично находим $BF=50^2/20=125$. Значит, длины катетов исходного треугольника *AC*=58, *BC*=145.

3. Сколько способов переставить буквы слова **ДЕМОНСТРАЦИЯ** так, чтобы гласные буквы не стояли рядом?

Ответ: 33868800.

Решение. Сначала расставим согласные буквы. Это можно сделать 7!=5040 способами. Теперь для гласных букв 8 свободных мест. Выбираем место для первой гласной, затем для второй и т.д. Это можно сделать $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$ способами. По правилу произведения всего $5040\cdot 6720 = 33868800$ способов.

4. Тело брошено с горизонтальной поверхности Земли со скоростью 12 м/с. Через 1,2 секунды полёта оказалось, что его скорость равна начальной. Определите дальность полёта тела. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в м.

Ответ: ≈12,47.

Решение. Время всего полета равно 1,2 секунды. Уравнение движения:

$y = 0 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, получаем, что $\sin\alpha = 0{,}5$.Следовательно, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Дальность полета: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1{,}2 \approx 12{,}47$ ***м.***

5. Идеальный двухатомный газ, находящийся в теплоизолированном сосуде, быстро сжали. При этом была совершена работа 2000 Дж, и газ нагрелся на ΔT. После этого, 40% молекул газа диссоциировали на атомы и затем газ снова быстро сжали. Какая при этом была совершена работа (в Дж), если газ снова нагрелся на ΔT?

Ответ: 2160.

Решение. В условии речь идёт об адиабатном процессе. Следовательно, $A = |-\Delta U| = \frac{5}{2}\vartheta R\Delta T$. То есть $\vartheta R\Delta T = 800$. После диссоциации получаем:

$A_2 = \left|-\Delta U_{\text{не диссоц}} - \Delta U_{\text{диссоц}}\right| = \frac{5}{2}0{,}6\vartheta R\Delta T + \frac{3}{2}0{,}8\vartheta R\Delta T = 2160$ **Дж.**

6. Груз, подвешенный к пружине жёсткостью k_1, совершает свободные, незатухающие колебания, период которых T_1=6 с. Тот же груз, подвешенный к пружине жёсткостью k_2, будет совершать колебания с частотой T_2=8 с. Если пружины соединить последовательно и к этой системе подвесить тот же груз, то какой период будет у этого маятника? Ответ запишите в с.

Ответ: 10.

Решение. Жёсткость последовательных пружин: $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Периоды колебаний: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Получаем: $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = 10$ с.

6.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. Прямая пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами $x_1 = 10$ и $x_2 = 15$. Какова абсцисса точки, в которой эта прямая пересекает ось Ox?

2. ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Из вершины C опущен перпендикуляр CD на гипотенузу. На отрезке CD как на диаметре построена окружность. Она пересекает стороны AC и BC соответственно в точках E и F. Найдите площадь треугольника ABC, если EC=12, FC=18.

3. Сколько способов переставить буквы слова **ВОЛЮНТАРИЗМ** так, чтобы гласные буквы не стояли рядом?

4. Тело брошено с горизонтальной поверхности Земли со скоростью 18 м/с. Через 1,8 секунды полёта оказалось, что его скорость равна начальной. Определите дальность полёта тела (в м). Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Идеальный двухатомный газ, находящийся в теплоизолированном сосуде, быстро сжали. При этом была совершена работа 1000 Дж, и газ нагрелся на ΔT. После этого, 40% молекул газа диссоциировали на атомы и затем газ снова быстро сжали. Какая при этом была совершена работа (в Дж), если газ снова нагрелся на ΔT?

6. Груз, подвешенный к пружине жёсткостью k_1, совершает свободные незатухающие колебания, период которых T_1=5 с. Тот же груз, подвешенный к пружине жёсткостью k_2, будет совершать колебания с частотой T_2=12 с. Если пружины соединить последовательно и к этой системе подвесить тот же груз, то какой период будет у этого маятника?

7. Задания для учащихся 6-х классов

7.1. Разбор решений задач

1. На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

Ответ: через 158 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 13:0y:zt. Тогда $y \geq 2$, $z \geq 4$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 5 баллов.

2. В понедельник в школьную библиотеку пришло 9 человек, во вторник – 8, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 10. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 19.

Решение. Во вторник и среду было 19 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 19. Приведем пример посещения библиотеки 19 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 19. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 9; во вторник – с 10 по 17; в среду – с 1 по 9, 18,19; в четверг – с 10 по 16; в пятницу – с 1 по 9 и 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. Клетки таблицы 3×3 были заполнены нулями. Можно взять любой квадрат 2×2 и к числам, записанным в его клетках прибавить по единице. Петя выполнил несколько таких операций и получил новую таблицу. Вася стёр некоторые числа, получилась таблица:

7	**12**	
16		
9	**10**	

Восстановите числа, которые стёр Вася. Не забудьте объяснить, как получен ответ.

Ответ:

7	**12**	**5**
16	**22**	**6**
9	**10**	**1**

Решение. Видно, что к левому верхнему квадрату операция применялась 7 раз. Если к правому верхнему квадрату операция применялась x раз, то во второй клетке верхней строки должно быть число $7+x$. Отсюда $x=5$. Аналогично находим число в правой нижней клетке, а затем и в двух оставшихся. (Дети должны писать более подробно!)

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без пояснений 6 баллов.

4. Сколько месяцев в не високосном году может иметь ровно 4 четверга? В год, когда таких месяцев наименьшее число, какой день недели в старый Новый год – 14 января? (Не високосный год имеет 365 дней)

Ответ: 7 или 8 месяцев; среда.

Решение. В году 12 месяцев, 52 полных и одна неполная неделя (из одного дня). Если этот день четверг (31-е декабря и, следовательно, первое января этого года), то всего 53 четверга в году (в каждую из 52-х полных недель один четверг плюс этот четверг). Если бы в каждом месяце было бы ровно по 4 четверга, то четвергов было бы $4 \times 12 = 48$. Следовательно, 53– 48=5 месяцев имеют по «лишнему», пятому четвергу, а семь месяцев – четыре четверга. Так как 1-е января – четверг, то 14 января – среда.

Если же неполная неделя – не четверг, то всего 52 четверга в году (столько, сколько полных недель), 52– 48=4 месяца имеют по «лишнему», пятому четвергу, а восемь месяцев – четыре четверга.

Оценивание. Правильный 1-й или 2-й ответ (без решения) – по одному баллу (всего 2 балла). Правильное решение для количества месяцев – 7 баллов. Всё правильно решено – 13 баллов.

5. За десять минут расстояние между двумя пешеходами сократилось с 1000 до 200 метров. Какое расстояние будет между ними ещё через десять минут. Оба пешехода идут с постоянной скоростью, вдоль одной прямой, не меняя направления своего движения.

Ответ: 600 или 1400 метров.

Решение. Свяжем систему отсчёта с одним из пешеходов. Возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта не успел дойти до первого. То есть прошел за 10 минут 800 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 10 минут он пройдёт ещё 800 метров. И расстояние между ними будет равно 600 метрам. **(4 балла)**

Второй вариант: второй пешеход в данной системе отсчета успел пройти мимо первого. То есть он прошёл за 10 минут 1200 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 10 минут он пройдет еще 1200 метров. И расстояние между ними будет равно 1400 метрам. **(4 балла)**

6. Скорость автомобиля по пути из города в деревню оказалась в два раза больше его скорости при движении в обратном направлении. При этом средняя скорость за всё время движения оказалась равной 42 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из города в деревню.

Ответ: 63 км/ч.

Решение. Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{s+s}{t_1+t_2}$, **(5 баллов)**

где $t_1 = \frac{s}{v}$ – время поездки из города в деревню, $t_2 = \frac{2s}{v}$ – время поездки из деревни в город. **(5 баллов)**

Получаем: $v = \frac{3v_{\text{ср}}}{2} = 63\ \text{км/ч}$. **(5 баллов)**

7. Велосипедист 20 минут ехал со скоростью 18 км/ч, затем 600 секунд стоял на месте и отдыхал. После этого в течение часа шёл пешком со скоростью 3,6 км/ч. Определите его среднюю скорость.

Ответ: 1,8 м/с или 6,4 км/ч.

Решение. На первом участке пройдено: $s_1 = v_1 t_1 = 5 \cdot 20 \cdot 60 = 6000$ м или $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ км. **(3 балла)**

На последнем участке: $s_3 = v_3 t_3 = 1 \cdot 3600 = 3600$ м или $3{,}6 \cdot 1 = 3{,}6$ км. **(3 балла)**

Средняя скорость:

$v_{\text{ср}} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{6000+0+3600}{1200+600+3600} \approx 1{,}8\ \text{м/с}$ или $\frac{6+0+3{,}6}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1} = 6{,}4\ \text{км/ч}$. **(4 балла)**

8. Аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имеет следующие размеры: длина – 3 м, ширина – 200 мм, высота – 80 см. Его заполняют водой со скоростью 2 литра в минуту. Через сколько минут после начала заполнения аквариума он окажется заполненным полностью?

Ответ: 240 минут.

Решение. Объём аквариума: $V = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ м^3. **(3 балла)**

Скорость заполнения: $v = \frac{0{,}002\ \text{м}^3}{1\ \text{мин}}$. **(3 балла)**

Аквариум полностью заполнится через: $t = \frac{V}{v} = \frac{0{,}48}{0{,}002} = 240$ мин. **(4 балла)**

7.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. На электронных часах высвечивается время 23:11:15. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

2. В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 человек, во вторник – 9, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 11. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

3. Клетки таблицы 3×3 были заполнены нулями. Можно взять любой квадрат 2×2 и к числам, записанным в его клетках прибавить по единице. Петя выполнил несколько таких операций и получил новую таблицу. Вася стёр некоторые числа, получилась таблица:

5	**14**	
16		
11	**13**	

Восстановите числа, которые стёр Вася. Не забудьте объяснить, как получен ответ.

4. Сколько месяцев в не високосном году может иметь ровно 5 пятниц? В год, когда таких месяцев наибольшее число, какой день недели в Рождество – 7 января? (Не високосный год имеет 365 дней)

5. За пять минут расстояние между двумя пешеходами сократилось с 400 до 100 метров. Какое расстояние будет между ними ещё через пять минут. Оба пешехода идут с постоянной скоростью, вдоль одной прямой, не меняя направления своего движения.

6. Скорость автомобиля по пути из города в деревню оказалась в три раза больше его скорости при движении в обратном направлении. При этом средняя скорость за всё время движения оказалась равной 36 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из города в деревню.

7. Велосипедист 1200 секунд ехал со скоростью 9 км/ч, затем 10 минут стоял на месте и отдыхал. После этого в течение полутора часов шёл пешком со скоростью 3,6 км/ч. Определите его среднюю скорость.

8. Аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имеет следующие размеры: длина – 1,5 м, ширина – 400 мм, высота – 60 см. Его заполняют водой со скоростью 3 литра в минуту. Через сколько минут после начала заполнения аквариума он окажется заполненным полностью?

8. Задания для учащихся 7-х классов

8.1. Разбор решений задач

1. На городской ратуше имеются два колокола, которые бьют каждый час в течение одной минуты. Колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами для этих колоколов соответственно составляют $\frac{4}{3}$ секунды и $\frac{5}{3}$ секунды. Совпавшие по времени удары воспринимаются как один. Сколько ударов туристы услышат за одну минуту, включая первый и последний?

Ответ: 73.

Решение. Первый колокол за минуту сделает $60: \frac{4}{3} + 1 = 46$ ударов. Второй колокол за минуту сделает $60: \frac{5}{3} + 1 = 37$ ударов. Удары колоколов совпадают через $\frac{20}{3}$ секунды, а всего они совпадут $60: \frac{20}{3} + 1 = 10$ раз. Значит, туристы услышат 46+37– 10=73 удара.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

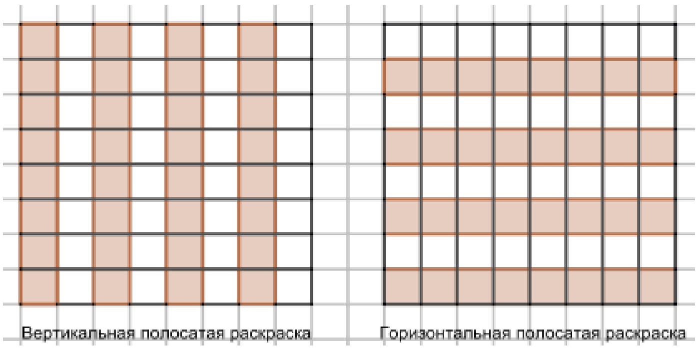
2. В понедельник в школьную библиотеку пришло 9 человек, во вторник – 8, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 10. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 19.

Решение. Во вторник и среду было 19 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 19. Приведем пример посещения библиотеки 19 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 19. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 9; во вторник – с 10 по 17; в среду – с 1 по 9, 18,19; в четверг – с 10 по 16; в пятницу – с 1 по 9 и 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от горизонтальной полосатой раскраски к вертикальной полосатой раскраске?



Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. Некоторое пятизначное число, записанное различными цифрами, умножили на 4. В результате получилось число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число, если известно, что его последняя цифра 8.

Ответ: 21978.

Решение: Число начинается на 1 и 2, иначе при умножении на 4 получится 6-значное число. Но при умножении на 4 оно не может заканчиваться на 1.

Значит, число $\overline{2abc8}\cdot 4=\overline{8cba2}$. Теперь a. Оно меньше 3 и не равно 2 (уже есть), и не равно 0 (иначе число справа не делится на 4). Значит, a=1 и $\overline{21bc8}\cdot 4=\overline{8cb12}$. Далее найдём c. Число 4c+3 должно оканчиваться на 1. Значит c равно или 2, или 7. Но 2 уже есть, тогда c=7 и $\overline{21b78}\cdot 4=\overline{87b12}$. Осталось определить b. Имеем $4b+3=\overline{3b}$, откуда b=9. Число $21978*4=87912$ (проверка).

Оценивание. За верное решение 13 баллов, за верный ответ без решения 2балла.

5. Грузоподъёмность нефтяного танкера 14310 тонн. Нефть загружают на танкер со скоростью 1500 баррелей в минуту. Плотность нефти 0,9 г/см^3. Сколько времени займёт полная загрузка танкера? Один баррель равен 159 литрам.

Ответ: 4000 секунд.

Решение. Объём нефти загружаемой ежесекундно: $\frac{1500\text{ баррелей}\cdot 159\cdot 10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ секунд}}$. **(5 баллов)**

Масса: $m=\rho V=\frac{900\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot 1500\text{ баррелей}\cdot 159\cdot 10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ секунд}}=3577{,}5\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}$. **(5 баллов)**

Время погрузки: $t=\frac{14310\cdot 10^3\text{ кг}}{3577{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}}=4000\text{ секунд}$. **(5 баллов)**

6. Если Вася отправился в гости к другу на велосипеде, а обратно вернулся пешком, то он потратил на всю дорогу 1 час. В другой раз проехав и туда, и обратно на велосипеде, он затратил на весь путь 20 минут. Сколько времени он затратит на дорогу, если и туда, и обратно он пройдёт пешком?

Ответ: 100 минут.

Решение. В первом случае всё затраченное время: $60=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}$. **(3 балла)**

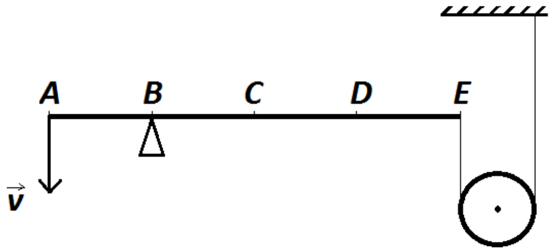
Во втором случае всё затраченное время: $20=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_1}$. **(3 балла)**

В результате получаем: $\frac{s}{v_1}=10$. **(1 балл)**

В третьем случае всё затраченное время:

$t=\frac{2s}{v_2}=2\left(60-\frac{s}{v_1}\right)=2(60-10)=100\text{ минут}$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Лёгкий стержень *AE* опирается на неподвижную опору в точке *B*. К правому концу стержня привязана лёгкая нерастяжимая нить, которая через однородный подвижный блок прикреплена к потолку. Известно, что *AB*=*BC*=*CD*=*DE*. Определите скорость центра блока в тот момент, когда левый конец стержня двигается вертикально вниз со скоростью *v*=4 м/с.



Ответ: 6 м/с.

Решение. Стержень поворачивается относительно точки B. **(2 балла)**
Следовательно, скорость точки E: $v_E = 3v = 12$ м/с. **(4 балла)**
Скорость центра блока: $v_ц = \frac{1}{2} v_E = 6$ м/с. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Куб состоит из восьми одинаковых кубиков меньшего размера. Два маленьких кубика заменили на такие же по размеру, но с большей в два раза плотностью. Определите отношение начальной и конечной плотностей большого куба.

Ответ: 0,8.

Решение. Связь массы и объёма: $m = \rho V$, **(3 балла)**
то есть новые кубики, при том же объёме, в два раза тяжелей.
Начальная плотность: $\rho_{нач} = \frac{8m_0}{8V_0}$. **(4 балла)**
Конечная плотность: $\rho_{кон} = \frac{6m_0+2m_1}{8V_0} = \frac{6m_0+2\cdot 2m_0}{8V_0} = \frac{10m_0}{8V_0}$. **(5 балла)**
Окончательный результат: $\frac{\rho_{нач}}{\rho_{кон}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$. **(3 балла)**

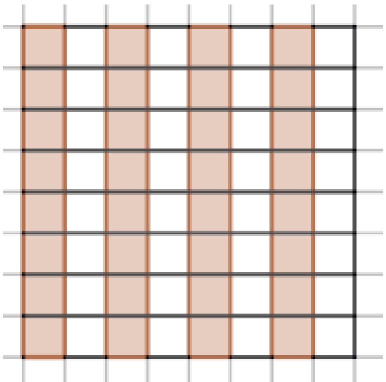
8.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. На городской ратуше имеются два колокола, которые бьют каждый час в течение одной минуты. Колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами для этих колоколов соответственно составляют $\frac{5}{3}$ секунды и 2 секунды. Совпавшие по времени удары воспринимаются как один. Сколько ударов туристы услышат за одну минуту, включая первый и последний?

2. В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 человек, во вторник – 9, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 11. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

3. Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от традиционной (шахматной) раскраски доски к вертикальной полосатой раскраске?



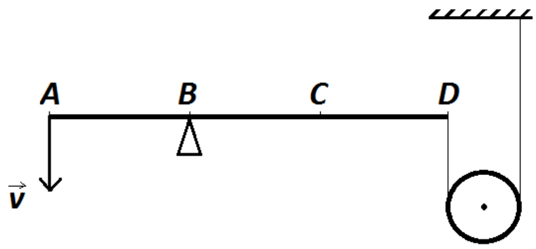
Вертикальная полосатая раскраска

4. Некоторое пятизначное число, записанное различными цифрами, умножили на 4. В результате получилось число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число, если известно, что его первая цифра 2.

5. Грузоподъёмность нефтяного танкера 28620 тонн. Нефть загружают на танкер со скоростью 750 баррелей в минуту. Плотность нефти 0,9 г/см^3. Сколько времени займёт полная загрузка танкера? Один баррель равен 159 литрам?

6. Если Вася отправился в гости к другу на велосипеде, а обратно вернулся пешком, то он потратил на всю дорогу полтора часа. В другой раз проехав и туда, и обратно на велосипеде, он затратил на весь путь 30 минут. Сколько времени он затратит на дорогу, если и туда, и обратно он пройдёт пешком?

7. Лёгкий стержень AD опирается на неподвижную опору в точке B. К правому концу стержня привязана лёгкая нерастяжимая нить, которая через однородный подвижный блок прикреплена к потолку. Известно, что $AB=BC=CD$. Определите скорость центра блока в тот момент, когда левый конец стержня двигается вертикально вниз со скоростью v=5 м/с.



8. Куб состоит из восьми одинаковых кубиков меньшего размера. Два маленьких кубика заменили на такие же по размеру, но с большей в три раза плотностью. Определите отношение конечной и начальной плотностей большого куба.

9. Задания для учащихся 8-х классов

9.1. Разбор решений задач

1. На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

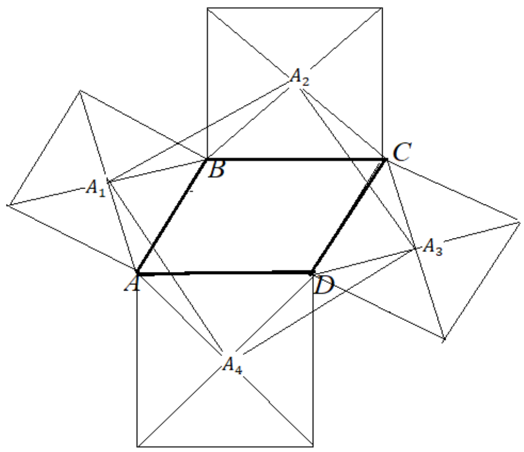
Ответ: через 158 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 13:0y:zt. Тогда $y \geq 2,\ z \geq 4,\ t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

Оценивание. За верное решение 10 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 4 балла.

2. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей квадратов являются вершинами одного квадрата.

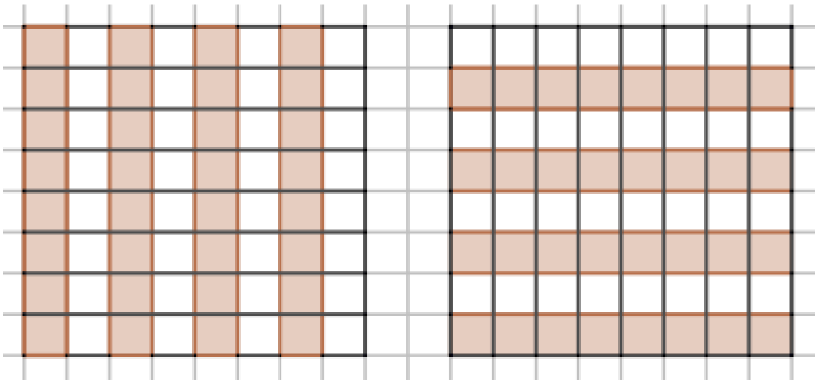
Решение. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, а центры квадратов – A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда треугольники $BA_1A_2, CA_2A_3, DA_3A_4, AA_4A_1$ равны по двум сторонам и углу, то есть $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1$.



Докажем, что углы в четырёхугольнике $A_1A_2A_3A_4$ прямые. Пусть острый угол параллелограмма равен α, а угол $\angle A_1A_4A = \beta$. Тогда $\angle A_1AA_4 = 90^{\circ} + \alpha$, $\angle AA_1A_4 = 90^{\circ} - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle A_4A_1B = \alpha + \beta$, а угол $\angle A_2A_1A_4 = 90^{\circ} - \alpha - \beta + (\alpha + \beta) = 90^{\circ}$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если доказано, что четырёхугольник – ромб, но ничего не сказано про углы, то 6 баллов.

3. Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от горизонтальной полосатой раскраски к вертикальной полосатой раскраске?



Вертикальная полосатая раскраска   Горизонтальная полосатая раскраска

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. Найдите все целые решения уравнения

$$x^4 + (x+1)^4 = (x+2)^4.$$

Ответ: –1.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+1)^4 = (x+2)^4 - x^4$, по формуле разности квадратов получаем

$$(x+1)^4 = ((x+2)^2 - x^2)((x+2)^2 + x^2),$$

$$(x+1)^4 = 8(x+1)((x+1)^2 + 1).$$

Число $(x+1)^2 + 1$ взаимно просто с $(x+1)$, следовательно, $(x+1)^2 + 1 = 1$, то есть $x = -1$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если корень угадан, то 2 балла. За недостаточную обоснованность единственности решения снимаем 4 балла.

5. Два литра переохлаждённой до t=–15^{O}С воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·^{O}С), удельная теплота плавления льда 3,3·10^5 Дж/кг.

Ответ: 0,42 литра.

Решение. Масса исходной воды: $m = \rho V = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2$ кг. **(1 балл)**

Уравнение теплового баланса: $c_{\text{В}} m_{\text{В}} \big(0 - (-15)\big) = \lambda m_{\text{Л}}$. **(5 баллов)**

В результате получаем, что масса получающегося льда:

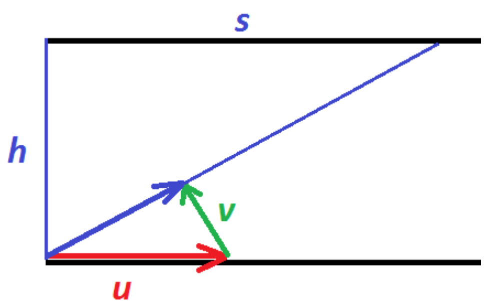
$m_{\text{Л}} = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 15}{330000} = \frac{21}{55}$ кг. **(2 балла)**

Его объём: $V = \frac{m_{\text{Л}}}{\rho} \approx 0{,}42$ л. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Ширина реки 40 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна *v*=2 м/с. С учётом того, что скорость течения *u*=4 м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

Ответ: ≈69,3 м.

Решение. Для минимального сноса необходимо, чтобы скорость лодки была направлена перпендикулярно направлению движения лодки относительно берега. **(4 балла)**



В результате, угол между направлением движения лодки и берегом: $\sin\alpha = \frac{v}{u}$ **(4 балла)**

или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s}$. **(4 балла)**

В результате получаем: $S = \frac{H\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \approx 69{,}3$ м. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии *x*=10 см от опоры подвесили груз массой *m*=3 кг и объёмом *V*=1000 см^3. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние Δ*x* необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды *ρ*=1 г/см^3.

Ответ: 5 см.

Решение. Условие равновесия в первом случае: $mg \cdot x = m_{\text{стержня}} g \cdot l$.

(3 балла)

Условие равновесия в первом случае:

$mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x) = m_{\text{стержня}} g \cdot l$. **(3 балла)**

В результате получаем: $mg \cdot x = mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x)$, **(2 балла)**

откуда: $\Delta x = 5$ см. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными U_V=10 В. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – I_A=10 А. Определите значение R.

Ответ: 2 Ом.

Решение. Напряжение источника: $U = U_V + U_V = 20$ В. **(4 балла)**

У идеального амперметра сопротивление: $r_A = 0$ Ом. **(3 балла)**

Следовательно, сопротивление резистора: $R = \frac{U}{I_A} = \frac{20}{10} = 2$ Ом. **(3 балла)**

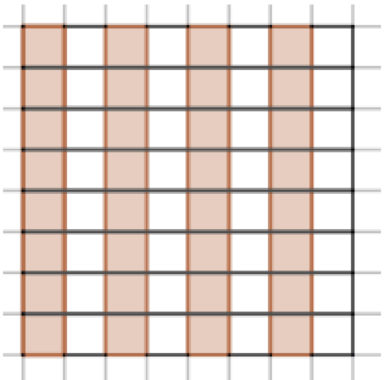
9.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. На электронных часах высвечивается время 23:11:15. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

2. На сторонах параллелограмма вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых гипотенуза – соответствующая сторона параллелограмма. Докажите, что вершины прямых углов этих треугольников являются вершинами одного квадрата.

3. Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от традиционной (шахматной) раскраски доски к вертикальной полосатой раскраске?


Вертикальная полосатая раскраска

4. Найдите все целые решения уравнения $(x+1)^4+(x+2)^4=(x+3)^4$.

5. Три литра переохлаждённой до t=–20^{О}С воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·^{О}С), удельная теплота плавления льда 3,3·10^5 Дж/кг.

6. Ширина реки 50 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна v=1 м/с. С учётом того, что скорость течения u=3 м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

7. Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии x=6 см от опоры подвесили груз массой m=4 кг и объёмом V=1000 см^3. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние Δx необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды ρ=1 г/см^3.

8. Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными U_V=5 В. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – I_A=4 А. Определите значение R.

10. Задания для учащихся 9-х классов

10.1. Разбор решений задач

1. У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему втрое больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 63 года. Сколько лет сейчас мужу?

Ответ: 27.

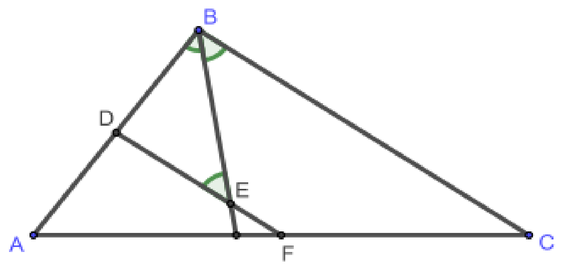
Решение. Пусть сейчас мужу $3x$ лет, а жене – y лет. Когда мужу было y лет, жене было x лет. Так как их возраст изменился одинаково, составим уравнение $y–x=3x–y$. Отсюда $y=2x$, разница в возрасте мужа и жены составляет x лет. Когда жене будет столько же лет, сколько мужу сейчас ($3x$) мужу будет $4x$. Получаем уравнение $3x+4x=63$, $x=9$.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. В треугольнике ABC известны длины сторон $BC=10$, $AB=6$. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

Ответ: 2.

Решение. По условию задачи DF – средняя линия треугольника. Поэтому $DF=BC/2$ и $DF \parallel BC$. Углы CBE и DEB равны как накрест лежащие. Кроме того, $\angle DBE=\angle CBE$, так как BE – биссектриса. Значит, треугольник BDE равнобедренный и $DE=DB=AB/2$.



Поэтому $EF=DF – DE=(BC – AB)/2=2$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. Пусть a и b – натуральные числа, причём $a<1000$. Известно, что a^{21} делится на b^{10}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Решение. Возьмём произвольный простой делитель p числа b. Он должен быть и делителем числа a (иначе степень a не разделится на степень b). Пусть x и y – наибольшие степени p, на которые делятся соответственно a и b. Тогда

$21x \geq 10y$, $y \leq 2{,}1x$. Так как a<1000, справедливо, что $x \leq 9$ (ведь уже $2^{10} > 1000$).

Итак, $y \leq 2{,}1x \leq 2x + 0{,}1 \cdot 9 = 2x + 0{,}9$. Отсюда $y \leq 2x$. Поскольку это верно для любого простого делителя числа b, получаем, что a^2 делится на b.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2021 = 0$ и $x^2 + 2021x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2022.

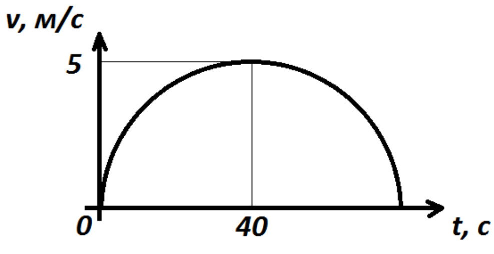
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2021$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2021}{2} = 1012{,}5$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2021 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2019$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2019$=4038. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2022.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 баллов.

5. Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке.



Определите среднюю скорость за первые сорок секунд движения.

Ответ: 3,93 м/с.

Решение. Путь – это площадь под графиком:

$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 5 \cdot 40 = 50\pi.$ **(5 баллов)**

Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{50\pi}{40} = 3{,}93$ м/с. **(5 баллов)**

6. Цепочка массой m=500 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=60°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 1,4 Н.

Решение. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно, $T = T_{\text{в}} \cos\alpha,$ **(5 баллов)**
где $T_{\text{в}}$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того, $2T_{\text{в}} \sin\alpha = mg.$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1{,}4$ Н. **(5 баллов)**

7. Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

Ответ: 2α+β.

Решение. Формула тонкой линзы в случае собирающей линзы:
$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}$. **(2 балла)**
Формула тонкой линзы в случае рассеивающей линзы:
$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}$. **(2 балла)**
С учётом того, что: $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d}$, **(2 балла)**
$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{f_1}$, **(2 балла)**
$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{f_2}$. **(2 балла)**
Получаем, что: $\gamma = 2\alpha + \beta$. **(5 баллов)**

8. Удельная теплоёмкость тела массой $m = 2$ кг зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 150$ Дж/(кг · °C) – удельная теплоёмкость при 0°C, $\alpha = 0{,}05$ °C^{-1} – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °C до 100 °C.

Ответ: 96 кДж.

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:
$c_{cp} = \frac{c_0(1+\alpha t_{\text{Н}}) + c_0(1+\alpha t_{\text{К}})}{2} = 600 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{°C}}$. **(5 баллов)**
Искомое количество тепла: $Q = c_{cp} m \Delta t = 600 \cdot 2 \cdot 80 = 96000$ Дж $= 96$ кДж.
(5 баллов)

10.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

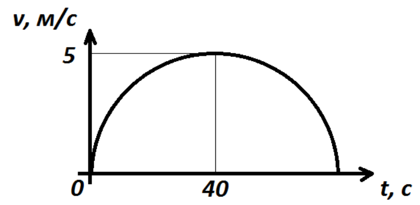
1. У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему в пять раз больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 84 года. Сколько лет сейчас мужу?

2. В треугольнике ABC известны длины сторон BC=11, AB=5. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

3. Пусть a и b – натуральные числа, причём a<2000. Известно, что a^{23} делится на b^{11}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

4. При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

5. Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке. Определите среднюю скорость за первые восемьдесят секунд движения.



6. Цепочка массой m=800 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=30°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

7. Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

8. Удельная теплоёмкость тела массой $m = 3\,кг$ зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 200\ Дж/(кг \cdot ℃)$ – удельная теплоёмкость при $0℃$, $\alpha = 0{,}05\ ℃^{-1}$ – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °С до 100 °С.

11. Задания для учащихся 10-х классов

11.1. Разбор решений задач

1. Известно, что $\cos\alpha + \cos\beta = c \neq 0$, $\sin\alpha + \sin\beta = s \neq 0$. Выразите $\cos(\alpha + \beta)$ через c и s.

Ответ: $\frac{c^2 - s^2}{c^2 + s^2}$.

Решение. Имеем $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c$,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = s.$$

Поделив второе равенство на первое, получим $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{c}$. Осталось применить формулу универсальной подстановки

$$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Оценивание. За верное решение 11 баллов.

2. Пусть *ABCD* – трёхзвенная ломаная в пространстве, все звенья которой равны и $\angle$ *BCD*= 90^o. Найдите расстояние от точки *A* до середины *BD*, если *AD*=2.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть *M* – середина *BD*. Треугольники *ABM* и *BDA* подобны. Действительно, угол при вершине *B* у них общий, и $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BM} = \sqrt{2} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB}$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{2}$, следовательно, *AM*=*AD*/$\sqrt{2}$=2/$\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. Дан набор действительных чисел $x_1, x_2, \dots x_{2k+1}$. Для произвольной нечётной степени m большей 2021 известно, что $x_1^m + x_2^m + \dots + x_{2k+1}^m = 0$. Докажите, что произведение этих чисел равно 0.

Решение. Докажем, что среди данных чисел имеются пары *a* и –*a*. Возьмём максимальное по модулю слагаемое (если не одно – любое из них) и разделим на этот модуль. Тогда получаем несколько 1 и –1, а остальные числа будут меньше 1 по модулю. Начнём увеличивать степень. Числа меньшие 1 в сумме дадут число меньшее 1, начиная с некоторой степени. Так как сумма 1 и –1 равна 0, то найдётся по крайней мере одно число равное максимальному по модулю, но с обратным знаком и ещё, возможно, несколько таких пар. Рассмотрим оставшиеся числа (их нечётное число) и повторим для них рассуждение. После конечного числа таких операций получим, что все ненулевые числа исчерпаны, а числа остались. Следовательно, среди чисел есть нуль.

Оценивание. За верное доказательство 13 баллов. Если без обоснования считается, что в наборе есть равное нулю число, то 2 балла.

4. При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2021 = 0$ и $x^2 + 2021x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2022.

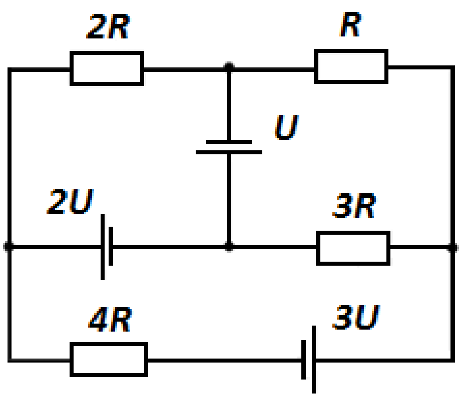
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2021$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2021}{2} = 1012{,}5$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2021 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2019$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2019$=4038. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2022.

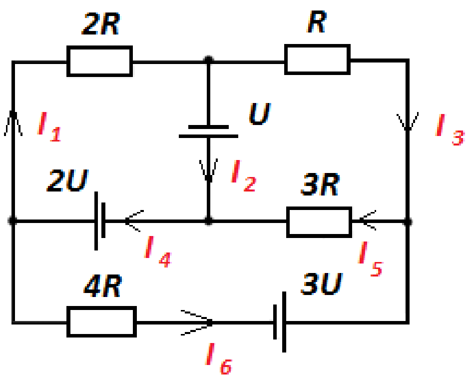
Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 баллов.

5. Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением 3R в цепи, схема которой изображена на рисунке. Все батарейки идеальные, напряжение U=5 В, сопротивление R=100 Ом.



Ответ: ≈2,6 мА.

Решение. Расставим токи, текущие по цепи.



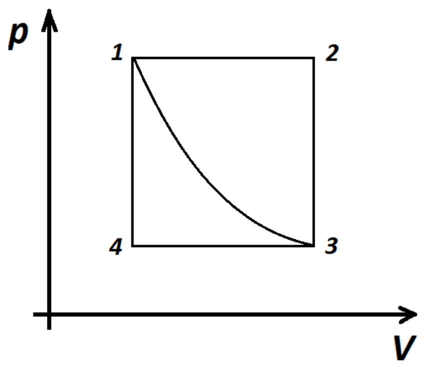
Запишем правила Кирхгофа: $-U = RI_3 + 3R \cdot I_5$, **(4 балла)**

$3U + 2U = 4R \cdot I_6 + 3R \cdot I_5$, **(4 балла)**

$I_3 + I_6 = I_5$. **(4 балла)**

Решая данную систему, получаем: $I_5 = \frac{1}{380}$ А $\approx 2{,}6$ мА. **(3 балла)**

6. С одноатомным идеальным газом провели два цикла: 1-2-3-1, коэффициент полезного действия которого η_1, и 1-3-4-1, коэффициент полезного действия которого η_2. Известно, что изменение температуры ΔT в процессах 4-1 и 1-2 одинаковое. Определите кпд цикла 1-2-3-4-1. Процесс 3-1 – адиабатный.



Ответ: $\frac{1}{8}(5\eta_1 + 3\eta_2)$.

Решение. КПД цикла 1-2-3-1: $\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{12}}$. **(2 балла)**

КПД цикла 1-3-4-1: $\eta_2 = \frac{A_2}{Q_{41}}$. **(2 балла)**

Искомый КПД: $\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_{12} + Q_{41}} = \frac{\eta_1 Q_{12} + \eta_2 Q_{41}}{Q_{12} + Q_{41}}$. **(4 балла)**

С учётом того, что: $Q_{12} = \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{12}$ **(2 балла)**

и $Q_{41} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{41}$, получаем: **(2 балла)**

$\eta = \frac{1}{8}(5\eta_1 + 3\eta_2)$. **(3 балла)**

7. Жёсткий стержень *AB* длиной 100 см скользит по горизонтальной поверхности. Известно, что в данный момент времени скорость точки *A* равная

5 м/с направлена точно в сторону точки B. Найдите значение скорости точки B, если известно, что она направлена под углом 60° к стержню.

Ответ: 10 м/с.

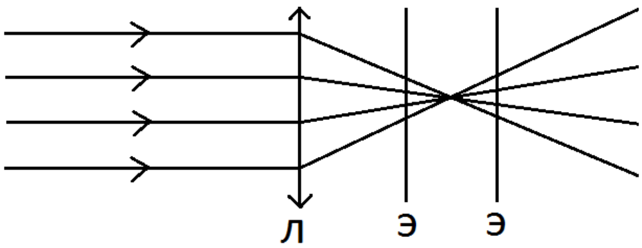
Решение. Проекция скорости точки B вдоль стержня: $v_{\text{вдоль}} = v_{\text{А}} = 5$ м/с. **(5 баллов)**

Следовательно, её скорость: $v_{\text{В}} = \frac{v_{\text{вдоль}}}{\cos 60^o} = 10$ м/с. **(5 баллов)**

8. На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 80 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определенного диаметра. Если экран передвинуть на 40 см, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ: 100 см или 60 см.

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии: **(4 балла)**



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы:

F_1=80+20=100 см или **(3 балла)**

F_2=80–20=60 см. **(3 балла)**

11.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

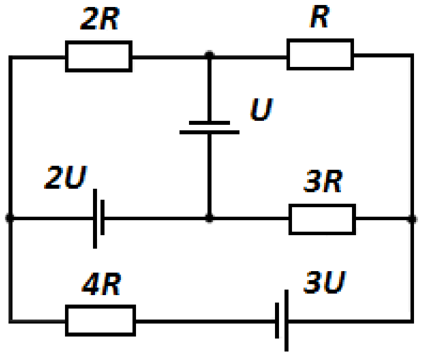
1. Известно, что $\cos\alpha + \cos\beta = \text{c} \neq 0$, $\sin\alpha + \sin\beta = s \neq 0$. Выразите $\sin(\alpha + \beta)$ через c и s.

2. Пусть $ABCD$ – трёхзвенная ломаная в пространстве, все звенья которой равны и $\angle$ BCD= 90^o. Найдите расстояние от точки A до середины BD, если AD=1.

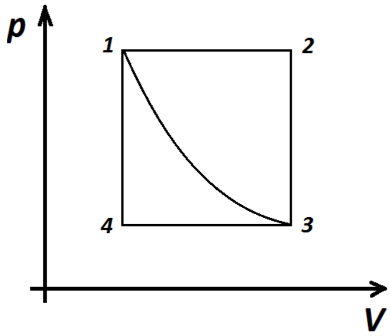
3. Дан набор действительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_{2k+1}$. Для произвольной нечётной степени m большей 2020 известно, что $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_{2k+1}^m = 0$. Докажите, что произведение этих чисел равно 0.

4. При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

5. Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением $4R$, в цепи, схема которой изображена на рисунке. Все батарейки идеальные, напряжение U=10 В, сопротивление R=10 Ом.



6. С двухатомным идеальным газом провели два цикла: 1-2-3-1, коэффициент полезного действия которого η_1, и 1-3-4-1, коэффициент полезного действия которого η_2. Известно, что изменение температуры ΔT в процессах 4-1 и 1-2 одинаковое. Определите кпд цикла 1-2-3-4-1. Процесс 3-1 – адиабатный.



7. Жёсткий стержень AB длиной 50 см скользит по горизонтальной поверхности. Известно, что в данный момент времени скорость точки A равная 4 м/с направлена точно в сторону точки B. Найдите значение скорости точки B, если известно, что она направлена под углом 30° к стержню.

8. На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 120 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определённого диаметра. Если экран передвинуть на 60 см, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы.

12. Задания для учащихся 11-х классов

12.1. Разбор решений задач

1. Найдите наименьшее натуральное значение n, удовлетворяющее уравнению $\sin n^o = \sin(2021n)^o$.

Ответ: 18.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{2021n-n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0;\\ \cos\left(\frac{2021n+n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0.\end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l}(1010n)^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}}\cdot k;\\ (1011n)^{\mathrm{o}} = 90^{\mathrm{o}}+180^{\mathrm{o}}\cdot m,\end{array}\right.$ где $k,m\in$ **N**. Далее $\left[\begin{array}{l}101n = 18k,\\ 337n = 30(2m+1).\end{array}\right.$ Так как 101 и 337 – простые числа, то в первом уравнении наименьшее n=18, а во втором – наименьшее значение n=30.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде *ABCDS* площадь основания совпадает с площадью боковой грани и равна 1. *M* – точка пересечения медиан грани *CDS*. Точка *N* лежит на прямой *AM* и *AN*:*NM*=3:4. Найдите сумму расстояний от точки *N* до всех граней пирамиды.

Ответ: $\sqrt{15}$/2.

Решение. Из условия задачи сторона основания пирамиды равна 1, апофема боковой грани – 2. Тогда высота пирамиды $h = \sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Объём пирамида *ABCDS* равен $V = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

С другой стороны, объём пирамиды можно найти как сумму объёмов пяти пирамид, вершина которых – точка *N*, а основания – грани пирамиды *ABCDS*. Тогда $V = \frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)$, где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – расстояния от точки *N* до граней пирамиды *ABCDS* (или высоты маленьких пирамид). Приравнивая объёмы, получаем ответ. Заметим, что сумма расстояний не зависит от расположения точки внутри данной пирамиды.

Оценивание. Если правильно найдена высота пирамиды, то 2 балла. Найдены правильно отдельно расстояния до граней – по 2 балла за каждое. За верное решение – 12 баллов.

3. В зависимости от параметра $a > 1$ найдите решение системы

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} = a^2-1,\\ y^{(x-a)^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.\end{cases}$$

Ответ: $x=y=a$.

Решение. Из первого уравнения получим, что переменные больше 1 (отрицательные отпадают сразу). Логарифмируем второе уравнение по основанию y:

$$\log_y y^{(x-a)^2} = \log_y \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.$$

Получаем: $(x-a)^2 = (\log_x y - 1)\log_y\left(\frac{x}{y}\right) = (\log_x y - 1)\left(\log_y x - 1\right)$.

В правой части – неположительное число, значит $x=y$ и $x=a$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если ответ угадан, то 2 балла.

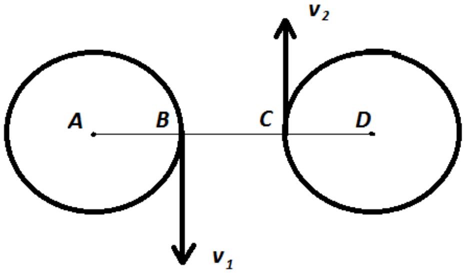
4. В бесконечной последовательности цифр 2, 0, 1, 9, … каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырёх цифр этой последовательности. Встретятся ли в этой последовательности:
а) подряд числа 4, 3, 2, 1; *б*) вторично четвёрка 2, 0, 1, 9 (в этом же порядке)?

Ответ: *а*) нет; *б*) да.

Решение. *а*) Будем записывать только чётности (чётная – пишем Ч, нечётная – Н) цифр этой последовательности, начиная с пятой. Получим:
Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н,… и т.д. Последовательность чётностей данной последовательности 4, 3, 2, 1 имеет вид Ч, Н, Ч, Н, и её нет в этом ряде.
б) Рассмотрим упорядоченные четвёрки из всевозможных цифр. На каждое место в такой четвёрке можно поставить любую из 10 цифр. Значит, всего разных четвёрок существует 10^4. Возьмём начало данной нам последовательности, содержащее 10^4+4 цифры. Из неё можно выбрать 10^4+1 четвёрку цифр, идущих в ней подряд. Так как всего таких **разных** четвёрок 10^4, то (по принципу Дирихле) из этих 10^4+1 четверок есть хотя бы две одинаковые. Пусть это $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ ($k<m$). В них, как мы заметили, $a_k = a_m,\ a_{k+1} = a_{m+1},\ a_{k+2} = a_{m+2},\ a_{k+3} = a_{m+3}$. Данная последовательность построена так, что по четырём её идущим подряд элементам $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ предыдущий элемент a_{k-1} ими однозначно определяется по формуле: $a_{k-1} = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2}$ (равенство по модулю 10). Тогда $a_{k-1} = a_{m-1}$. Это значит, что если равны 2 четвёрки $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$, то равны 2 предыдущие четвёрки $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ $a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$. Тогда, двигаясь по данной последовательности влево, к её началу, получим, что a_1, a_2, a_3, a_4 совпадает с $a_{m-k+1}, a_{m-k+2}, a_{m-k+3}, a_{m-k+4}$. Это требовалось доказать, так как эти последовательности разные ($k<m$).

Оценивание. За верное доказательство пункта *а*) – 6 баллов, за верное решение пункта *б*) – 8 баллов.

5. Два автомобиля двигаются по окружностям одинакового радиуса с одинаковыми по модулю скоростями $v_1 = v_2 = v$. Известно, что *AB*=*BC*=*CD*=*R*. Определите скорость v_{21} второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем в момент времени, указанный на рисунке.



Ответ: 3*v*.

Решение. Переносная скорость точки *C* в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем: $v_C = \frac{AC}{AB} v_1 = 2v.$ **(5 баллов)**

При этом она направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым:

$v_{21} = v_2 + v_C = v + 2v = 3v.$ **(5 баллов)**

6. К колесу радиусом *R*=0,1 м с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе маленький грузик массой *m*=1 кг. Найдите массу колеса *M*, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω=5 рад/с. Ускорение свободного падения *g*=10 м/с^2.

Ответ: 3 кг.

Решение. Выведем колёса из положения равновесия на угол α. Закон сохранения полной механической энергии:

$mgR(1 - \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = const.$ **(5 баллов)**

С учётом того, что $v=\omega R$, продифференцируем это выражение по времени:

$mgR\sin\alpha \cdot \omega + \frac{mR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon + \frac{MR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon = 0.$ **(5 баллов)**

Так как для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем, что частота малых колебаний:

$\omega = \sqrt{\frac{mg}{R(m+M)}}\,.$ **(3 балла)**

В результате масса колеса: $M = \frac{mg}{\omega^2 R} - m = \frac{1\cdot 10}{5^2\cdot 0{,}1} - 1 = 3$ кг . **(2 балла)**

7. Два моля идеального газа находятся в цилиндрическом вертикальном сосуде под лёгким поршнем. Известно, что при изменении температуры газа от 27°С до 127 °С местоположение поршня не меняется. Определите объём занимаемый газом в этом температурном интервале. Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: 0,058 $м^3$.

Решение. Условия равновесия для начального и конечного состояний газа:

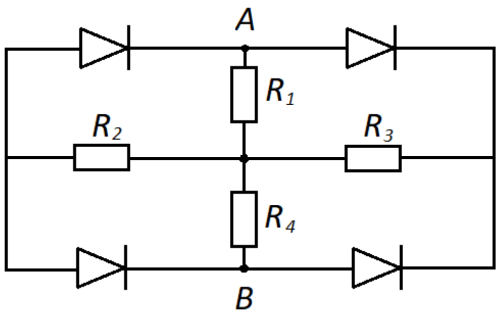
$p_a S + F_{тр} = p_1 S,$ **(4 балла)**

$p_a S - F_{тр} = p_2 S.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $2p_a = p_1 + p_2 = \frac{\vartheta R}{V}(T_1 + T_2).$ **(3 балла)**

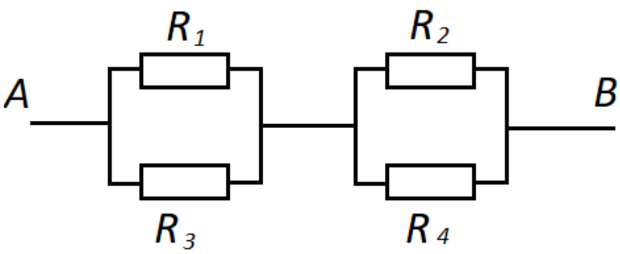
$V = \frac{\vartheta R}{2p_a}(T_1 + T_2) = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot(300+400)}{2\cdot 10^5} \approx 0{,}058\ м^3.$ **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом, и R_4=4 Ом. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками *A* и *B* в ситуации, когда к точке *A* подключают положительный полюс источника тока, а к точке *B* – отрицательный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.



Ответ: ≈2,08 Ом.

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема: **(5 баллов)**



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2+R_4} = \frac{1\cdot 3}{1+3} + \frac{2\cdot 4}{2+4} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$ Ом.

(5 баллов)

12.2. Задачи для самостоятельного решения

В этом разделе приведены задачи для самостоятельной работы. Они похожи на те, которые рассматривались ранее. Рекомендуем вам разобраться и решать их самим. Результат можно проверить по ответу, а если возникают трудности, то можно поискать подсказки в аналогичной задаче выше.

1. Найдите наименьшее натуральное значение n, удовлетворяющее уравнению $\sin n^o + \sin(2021n)^o = 0$.

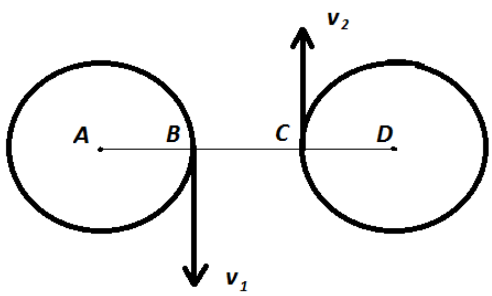
2. В правильной четырёхугольной пирамиде *ABCDS* площадь основания совпадает с площадью боковой грани и равна 4. *M* – точка пересечения медиан грани *CDS*. Точка *N* лежит на прямой *AM* и *AN*:*NM*=2:3. Найдите сумму расстояний от точки *N* до всех граней пирамиды.

3. В зависимости от параметра $a > 2$ найдите решение системы

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-4}\sqrt{y^2-4} = a^2 - 4, \\ y^{(x-a)^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}. \end{cases}$$

4. В бесконечной последовательности цифр 2, 0, 2, 1, … каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырёх цифр этой последовательности. Встретятся ли в этой последовательности: *а*) подряд числа 9, 8, 7, 6; *б*) вторично четвёрка 2, 0, 2, 1 (в этом же порядке)?

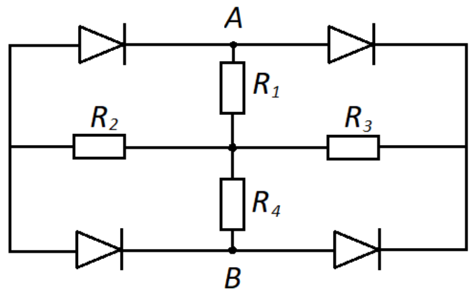
5. Два автомобиля двигаются по окружностям одинакового радиуса со скоростями $v_1 = v$ и $v_2 = 2v$. Известно, что *AB*=*BC*=*CD*=*R*. Определите скорость v_{21} второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем в момент времени, указанный на рисунке.



6. К колесу радиусом *R*=0,2 м с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе маленький грузик массой *m*=0,5 кг. Найдите массу колеса *M*, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω=5 рад/с. Ускорение свободного падения *g*=10 м/с^2.

7. Три моля идеального газа находятся в цилиндрическом вертикальном сосуде под лёгким поршнем. Известно, что при изменении температуры газа от 27^{o}C до 177 ^{o}C местоположение поршня не меняется. Определите объём занимаемый газом в этом температурном интервале. Атмосферное давление 10^5 Па.

8. В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом, и R_4=4 Ом. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают отрицательный полюс источника тока, а к точке B – положительный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.



ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6 класс (отборочный этап)

1. 7
2. 0,5.
3. 12.
4. $62{,}72^{\circ}$.
5. 1.
6. 44 км/ч ≈ 12,2 м/с.

7 класс (отборочный этап)

1. 35
2. 4
3. 9
4. 0,06
5. 75°
6. 1500.

8 класс (отборочный этап)

1. $11\frac{2}{3}$.
2. 14; 28.
3. 108.
4. 51,7.
5. ≈0,93 см или ≈9 мм.
6. ≈4714 с или ≈79 минут.

9 класс (отборочный этап)

1. Через 9 мин.
2. 16.
3. 3600.
4. 2,5.
5. 1,5.
6. 0,25.

10 класс (отборочный этап)

1. 171.
2. 18.
3. 14400.
4. 40.
5. 8.
6. 1500.

11 класс (отборочный этап)

1. 6.
2. 507.
3. 8467200.
4. ≈28.
5. 1080.
6. 13.

6 класс (заключительный этап)

1. через 170 с.
2. 20.
3.

5	**14**	**9**
16	**27**	**11**
11	**13**	**2**

4. 4 или 5 месяцев; четверг.
5. 200 или 600 метров.
6. 72 км/ч.
7. 1,2 м/с или 4,2 км/ч.
8. 120 минут.

7 класс (заключительный этап)

1. 61.
2. 20.
3. можно.
4. 21978.
5. 16000 секунд.
6. 150 минут.
7. 5 м/с.
8. 1,5.

8 класс (заключительный этап)

1. через 170 с.
2. необходимо привести доказательство
3. можно.
4. –2.
5. 0,85 литра.
6. ≈141,4 м.
7. 2 см.
8. 2,5 Ом.

9 класс (заключительный этап)

1. 35.
2. 3.
3. верно.
4. – 2021.
5. 3,93 м/с.
6. 6,9 Н.
7. 2α+β.
8. 192 кДж.

10 класс (заключительный этап)

1. $\frac{2sc}{c^2+s^2}$.
2. $\sqrt{2}/2$.
3. необходимо привести доказательство
4. – 2021.
5. ≈1,21 А.
6. $\frac{1}{12}(7\eta_1 + 5\eta_2)$.
7. ≈4,6 м/с.
8. 150 см или 90 см.

11 класс (заключительный этап)

1. 9.
2. $\sqrt{15}$.
3. *x*=*y*=*a*.
4. *а*) нет; *б*) да.
5. 4*v*.
6. 0,5 кг.
7. 0,093 м^3.
8. ≈2,38 Ом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Воронцов А.Г., Созыкин С.А., Гусев А.В. Сборник олимпиадных задач по физике за 2015-2019 учебные года. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019.

Эвнин А.Ю. 150 красивых задач для будущих математиков: с подробными решениями. Изд, стереотип: Учебное пособие, 2018. – 224 с.;

Эвнин А.Ю. Еще 150 красивых задач для будущих математиков: с подробными решениями. Учебное пособие, 2018. – 216 с.;

Эвнин А.Ю. Сборник задач по дискретной математике. – М.: URSS, 2016. – 272 с.;

Решаем задачи по физике повышенной сложности: учеб. пособие . (для школьников и абитуриентов) / В.И. Порхун, Т.В. Левина, Д.Н. Гурулев, Л.В. Палаткина; ВолгГТУ. - Волгоград, 2018. - 38 с.

Математика. Разбор заданий для поступающих в ВолгГТУ: учебное пособие для поступающих в опорный университет / А. А. Тырымов, М. И. Андреева, Д. Н. Гурулев, Л. В. Палаткина, Ю.В. Левин: / ВолгГТУ - Волгоград, 2020.– 72 с.

Физика. Разбор заданий вступительного испытания для поступающих в ВолгГТУ: учебное пособие для поступающих в опорный университет / И. В. Поляков, А. В. Аршинов, Г. Ю. Васильева, Д. Н. Гурулев, Л. В. Палаткина, Ю. В. Левин: / ВолгГТУ - Волгоград, 2020.– 48 с.

Математические олимпиады для школьников: методы и приемы решения задач : учебное пособие / Л.М. Данович, Н.А. Наумова, Т.А. Карачанская, О.В. Коренева, В.Н. Савин, А.Л. Бочарова-ЛескинаН.О. Чубырь, Т.П. Егорова, О.В. Пергун, Н.Ф. Тесленко; ФГБОУ ВО «КубГТУ». – Краснодар: Изд. ФГБОУ ВО «КубГТУ», 2018. – 164 с.

В.В. Ческидов, А.В. Липина, И.А. Мельниченко. Математика и физика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инжнереной направленности, 8-9 классы. Изд.: МИСиС, 2018.

В.В. Ческидов, А.В. Липина, И.А. Мельниченко. Математика и физика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности, 10-11 классы. Изд.: МИСиС, 2018.

В.В. Ческидов, А.В. Липина, И.А. Мельниченко. Аналитические и творческие задания: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности, 8-11 классы. Изд.: МИСиС, 2018.

И.В. Апыхтина, Е.А. Новикова. Физика и химия. Часть 1. Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инжнереной направленности. Изд.: МИСиС, 2017.

И.В. Апыхтина, Е.А. Новикова. Физика и химия. Часть 2. Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инжнереной направленности. Изд.: МИСиС, 2017.

Сабурова Т.Н. Математика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 10-11 классы. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2016 – 62 с.

Сабурова Т.Н. Математика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 8-9 классы. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2016 – 62 с.

Ким-Тян Л.Р. Математика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 6-7 классы. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2016 – 55 с.

Рыкова Е.В., Рыков В.Т. Готовимся к олимпиаде по физике. Учебное пособие / ФГБОУ ВО «КубГТУ». – Краснодар: Изд.ФГБОУ ВО «КубГТУ», 2016. – 256 с.

Рахштадт Ю.А.. Физика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 9-11 классы. Ч. I. Тематический банк задач, рекомендуемых школьникам. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2016. – 57 с.

Рахштадт Ю.А.. Физика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 9-11 классы. Ч. II. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Руководство к решению задач. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2016. – 50 с.

Рахштадт Ю.А.. Физика: методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 9-11 классы. Ч. III. Электромагнетизм. Оптика. Квантовая физика. Физика атома и ядра. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2016. – 50 с.

Гоник И.Л., Гурулев Д.Н., Москвичев С.М., Аристова Ю.В. «Олимпиады школьников Волгоградского государственного технического университета». - Волгоград, 2016.